SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2013 – 2014

Ngày thi: 26 tháng 9 năm 2013
Môn thi: TOÁN - Buổi thi thứ hai
Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang, thí sinh không phải chép đề vào giấy thi)

Bài 1. *(4 điểm)*

Giải phương trình: $(2x-3)\sqrt{x^2+2x+2}=x^2-2x+4$

Bài 2. *(4 điểm)*

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 = 6x + y + 11 \\ y^3 = y - x - 3 \end{cases}$

Bài 3. *(4 điểm)*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$ với mọi n nguyên dương.

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ thì $u_n > \sqrt{5}$. Tìm $\lim u_n$.

Bài 4. *(4 điểm)*

Tìm tất cả các số tự nhiên m sao cho với n là một số tự nhiên nào đó, ta có $m^n \equiv 1 \pmod{n}$ thì $m \equiv 1 \pmod{n}$.

Bài 5. *(4 điểm)*

Cho tam giác đều ABC cạnh a. M và N là hai điểm di động lần lượt trên hai cạnh AB và AC sao cho $\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$.

a) Chứng minh rằng MBCN là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn.

b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AMN theo a.

---- Hết ----

Họ và tên thí sinh: ....

Số báo danh: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

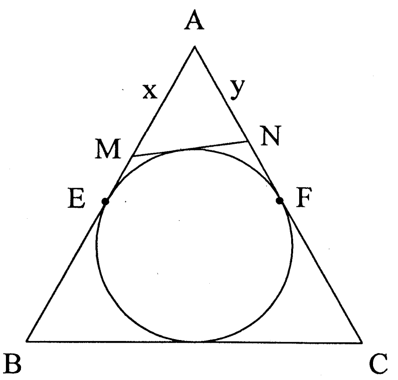
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2013 – 2014

....

HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN (Buổi thi thứ hai)

BÀI	CÁCH GIẢI	ĐIỂM
Bài 1 *(4 điểm)*	***Giải phương trình*** $(2x-3)\sqrt{x^2+2x+2}=x^2-2x+4$	
	Điều kiện: $x>\dfrac{3}{2}$ Đặt $t=\sqrt{x^2+2x+2}, t>0$ thì $x^2=t^2-2x-2$. Phương trình đã cho tương đương với $t^2-(2x-3)t-4x+2=0$	1
	Giải phương trình trên tìm được $t=-2$ (loại), $t=2x-1$	1
	Với $t=2x-1$ thì được phương trình $\sqrt{x^2+2x+2}=2x-1 \Leftrightarrow 3x^2-6x-1=0$ (do $2x-1>0$)	1
	Giải phương trình trên tìm được nghiệm $x=\dfrac{3+\sqrt{12}}{3}$, còn $x=\dfrac{3-\sqrt{12}}{3}$ bị loại	1
Bài 2 *(4 điểm)*	***Giải hệ phương trình*** $\begin{cases} x^3=6x+y+11 \\ y^3=y-x-3 \end{cases}$	
	Hệ tương đương với $\begin{cases} (x^3-27)-6(x-3)=y+2 \\ (y^3+8)-(y+2)=3-x \end{cases}$	1
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x^2+3x+3)=y+2 \\ (y+2)(y^2-2y+3)=3-x \end{cases}$	1
	Vì $x^2+3x+3>0, y^2-2y+3>0$ nên $x>3 \Rightarrow y>-2 \Rightarrow x<3$. Vô lý. Tương tự cho trường hợp $x<3$.	1
	Suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(3;-2)$.	1

Bài 3 *(4 điểm)*	***Cho dãy số*** (u_n) ***xác định bởi:*** $u_1 = 2$ ***và*** $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$ ***với mọi n nguyên dương. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương*** $n \geq 2$ ***thì*** $u_n > \sqrt{5}$. ***Tìm*** $\lim u_n$.	
	* $u_2 = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{5}{u_1}\right) = \frac{9}{4} > \sqrt{5}$	0,5
	* Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, ta có $u_k > \sqrt{5}$. Suy ra $u_k \neq \frac{5}{u_k}$. (thêm) Khi đó $u_{k+1} = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{5}{u_k}\right) > \frac{1}{2}.2\sqrt{u_k.\frac{5}{u_k}} = \sqrt{5}$. * Vậy $u_n > \sqrt{5}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.	0,5
	$u_{n+1} - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{u_n} - \sqrt{5}\right) =$	1
	$= \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2u_n}\left(\sqrt{5} - u_n\right) < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{5}\right)$	1
	Suy ra: $0 < u_n - \sqrt{5} < \frac{1}{2^{n-2}}\left(u_2 - \sqrt{5}\right), \forall n \geq 3$	0,5
	Vì $\lim \frac{1}{2^{n-2}}\left(u_2 - \sqrt{5}\right) = 0$ nên $\lim\left(u_n - \sqrt{5}\right) = 0$. Suy ra $\lim u_n = \sqrt{5}$.	0,5
Bài 4 *(4 điểm)*	***Tìm tất cả các số tự nhiên m sao cho với n là một số tự nhiên nào đó, ta có*** $m^n \equiv 1 \pmod{n}$ ***thì*** $m \equiv 1 \pmod{n}$.	
	Nếu $m = 1$ thì bài toán thoả mãn.	0,5
	Nếu $m = 2$, ta có $2^n \equiv 1 \pmod{n}$ với mọi $n > 1$. ? Giả sử p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n, khi đó $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ (*)	0,5
	Từ (*) ta có p là số lẻ, suy ra n là số lẻ, do đó $(n, p-1) = 1$.	0,5
	Vậy tồn tại các số nguyên a, b sao cho $an + b(p-1) = 1$.	0,5
	Theo định lí Fermat nhỏ thì: $2^1 = 2^{na}.2^{(p-1)b} \equiv 1 \pmod{p}$. Vô lí.	0,5
	Nếu $m > 2$, ta có $m^{(m-1)^2} \equiv [1 + (m-1)]^{(m-1)^2} \equiv 1 \pmod{(m-1)^2}$	0,5
	Mặt khác $m \not\equiv 1 \pmod{(m-1)^2}$. Bài toán không thoả mãn.	0,5
	Tóm lại $m = 1$ là các giá trị cần tìm.	0,5

Bài 5 *(4 điểm)*	***Cho tam giác đều ABC cạnh a. M và N là hai điểm di động lần lượt trên hai cạnh AB và AC sao cho*** $\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=1$. ***a) Chứng minh rằng MBCN là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn.*** ***b) Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AMN theo a.***	
		
	a) Đặt $AM = x, AN = y$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC. Từ $\frac{AM}{MB}+\frac{AN}{NC}=1$ suy ra $\begin{cases} AM < MB \\ AN < NC \end{cases}$. Vậy M, N lần lượt thuộc các đoạn AE và AF. Từ giả thiết ta có: $\frac{a-MB}{MB}+\frac{a-NC}{NC}=1 \Rightarrow \frac{a}{MB}+\frac{a}{NC}=3$ $\Rightarrow a(MB+NC)=3MB.NC$.	0,5
	$MN^2 = AM^2 + AN^2 - AM.AN$ $= (a-MB)^2 + (a-NC)^2 - (a-MB)(a-NC)$ $= a^2 + MB^2 + NC^2 - 2a(MB+NC) + a(MB+NC) - MB.NC$	0,5
	$= a^2 + MB^2 + NC^2 - 2a(MB+NC) + 3MB.NC - MB.NC$ $= a^2 + MB^2 + NC^2 - 2a(MB+NC) + 2MB.NC$ $= (MB+NC-a)^2$.	0,5
	$\Rightarrow MN = MB + NC - a \Rightarrow MN + BC = MB + NC \Rightarrow$ MBCN là tứ giác ngoại tiếp được. Đường tròn nội tiếp tứ giác MBCN cũng là đường tròn nội tiếp tam giác ABC.	0,5
	b) Diện tích tam giác AMN là $S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$.	0,5
	Mặt khác $a = x + y + MN = x + y + \sqrt{x^2+y^2-xy} \geq 2\sqrt{xy} + \sqrt{xy} = 3\sqrt{xy}$	0,5

	$\Rightarrow xy \le \dfrac{a^2}{9} \Rightarrow S_{AMN} \le \dfrac{a^2\sqrt{3}}{36}$	0,5
	Vậy $\max S_{AMN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{36} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{a}{3} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3}$.	0,5

...... Hết ......